プリズム分解で作った写像 Φ が i_{0*} を i_{1*} に結ぶチェインホモトピーである事

ゆーぐま

2025 年 2 月 15 日

1　示すぞー！

1.1　定義

• **標準 n-単体** Δ^n とは, $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準基底 $e_0^{(n)}, e_1^{(n)}, \ldots, e_n^{(n)}$ の凸結合 (係数の和が 1, 係数はすべて 0 以上となるような線形結合) で表される点の集合である.

以降, **写像の右上の数字は定義域の単体の右上の数であること**と, **基底さえ決まれば準同型, 線形写像が定まること**に注意しよう. また Y^X で X から Y への連続写像を表すこととする.

• **面写像** $d_i^{(n-1)} : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ は,

$$d_i^{(n-1)}(e_k^{(n-1)}) = \begin{cases} e_k^{(n)} & (k < i) \\ e_{k+1}^{(n)} & (k \geq i) \end{cases}$$

で定まる線形写像を Δ^{n-1} に制限して (値域も Δ^n に制限して) 得られる写像である.

● **境界写像** $\partial_n : \mathbb{Z}X^{\Delta^n} \to \mathbb{Z}X^{\Delta^{n-1}}$ とは, $\sigma \in X^{\Delta^n}$ に対して

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(\sigma \circ d_i^{(n)})$$

で定まる準同型である.($(-1)^i$ は単体の境界を取るときの向きに対応する)
● 写像 $s_i^{(n+1)} : \Delta^{n+1} \to \Delta^n \times [0,1]$ は,

$$s_i^{(n+1)}(e_k^{(n-1)}) = \begin{cases} (e_k^{(n)}, 0) & (k \leq i) \\ (e_{k-1}^{(n)}, 1) & (k > i) \end{cases}$$

で定まる線形写像を Δ^{n+1} に制限して (値域も $\Delta^n \times [0,1]$ に制限して) 得られる写像である.
● $\Phi_n : \mathbb{Z}X^{\Delta^n} \to \mathbb{Z}\left((X \times [0,1])^{\Delta^n}\right)$ を $\sigma \in X^{\Delta^n}$ に対して

$$\Phi_n(\sigma) := \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(\sigma \times 1_{[0,1]}) \circ s_i^{(n+1)}$$

と置くことによって定義する. これは幾何学的には $\mathbb{Z}X^{\Delta^n}$ の元を縦に引き延ばすことに対応する (表紙の図参照).
● $i_\epsilon : \Delta^n \to \Delta^n \times [0,1]$ を,

$$i_\epsilon(x) = (x, \epsilon)$$

で定義する.

1.2 証明

以降, 写像の合成記号は省略する.

補題 1.2.1. (補題 2.2.9) Δ^n から $\Delta^n \times [0,1]$ への連続写像として,

(1) $s_i^{(n+1)} d_j^{(n)} = (d_{j-1}^{(n-1)} \times 1_{[0,1]}) s_i^{(n)}$ ($i < j-1$ のとき)
(2) $s_{j-1}^{(n+1)} d_j^{(n)} = s_j^{(n+1)} d_j^{(n)}$
(3) $s_n^{(n+1)} d_{n+1}^{(n)} = i_0$
(4) $s_0^{(n+1)} d_0^{(n)} = i_1$
(5) $s_i^{(n+1)} d_j^{(n)} = (d_j^{(n-1)} \times 1_{[0,1]}) s_{i-1}^{(n)}$ ($i > j$ のとき)

証明. 基底 $e_k^{(n)} \in \Delta^n$ をとって値が等しいことを示す.

(1) ($i < j-1$ のとき)

$$
\begin{aligned}
s_i^{(n+1)} d_j^{(n)} e_k^{(n)} &= \begin{cases} s_i^{(n+1)} e_k^{(n+1)} & (k < j) \\ s_i^{(n+1)} e_{k+1}^{(n+1)} & (k \geq j) \end{cases} \\
&= \begin{cases} (e_k^{(n+1)}, 0) & (k \leq i) \\ (e_{k-1}^{(n+1)}, 1) & (i < k < j) \\ (e_k^{(n+1)}, 1) & (k \geq j) \end{cases} \\
&= \begin{cases} (d_{j-1}^{(n-1)} \times 1_{[0,1]})(e_k^{(n+1)}, 0) & (k \leq i) \\ (d_{j-1}^{(n-1)} \times 1_{[0,1]})(e_{k-1}^{(n+1)}, 1) & (i < k) \end{cases} \\
&= (d_{j-1}^{(n-1)} \times 1_{[0,1]}) s_i^{(n)} e_k^{(n)}
\end{aligned}
$$

(2) (1) と同様に

$$
s_{j-1}^{(n+1)} d_j^{(n)} e_k^{(n)} = \begin{cases} (e_k^{(n+1)}, 0) & (k \leq j-1) \\ (e_k^{(n+1)}, 1) & (k \geq j) \end{cases}
$$

一方,

$$
\begin{aligned}
s_j^{(n+1)} d_j^{(n)} e_k^{(n)} &= \begin{cases} s_{j-1}^{(n+1)} e_k^{(n+1)} & (k < j) \\ s_{j-1}^{(n+1)} e_{k+1}^{(n+1)} & (k \geq j) \end{cases} \\
&= \begin{cases} (e_k^{(n+1)}, 0) & (k \leq j-1) \\ (e_k^{(n+1)}, 1) & (k \geq j) \end{cases}
\end{aligned}
$$

より等しい.

(3)

$$
\begin{aligned}
s_n^{(n+1)} d_{n+1}^{(n)} e_k^{(n)} &= s_n^{(n+1)} e_k^{(n)} \\
&= (e_k^{(n)}, 0) \\
&= i_0 e_k^{(n)}
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
s_0^{(n+1)} d_0^{(n)} e_k^{(n)} &= s_0^{(n+1)} e_{k+1}^{(n)} \\
&= (e_k^{(n)}, 1) \\
&= i_1 e_k^{(n)}
\end{aligned}
$$

(5) ($i>j$ のとき)

$$
\begin{aligned}
s_i^{(n+1)} d_j^{(n)} e_k^{(n)} &= \begin{cases} s_i^{(n+1)} e_k^{(n+1)} & (k<j) \\ s_i^{(n+1)} e_{k+1}^{(n+1)} & (k \geq j) \end{cases} \\
&= \begin{cases} (e_k^{(n+1)}, 0) & (k<j) \\ (e_{k+1}^{(n+1)}, 0) & (j \leq k, k+1 \leq i) \\ (e_k^{(n+1)}, 1) & (k+1>i) \end{cases} \\
&= \begin{cases} (d_j^{(n-1)} \times 1_{[0,1]})(e_k^{(n+1)}, 0) & (k<i) \\ (d_j^{(n-1)} \times 1_{[0,1]})(e_{k-1}^{(n+1)}, 1) & (i \leq k) \end{cases} \\
&= (d_j^{(n-1)} \times 1_{[0,1]}) s_{i-1}^{(n)} e_k^{(n)}
\end{aligned}
$$

□

命題 1.2.2.

$$
\partial_{n+1} \Phi_n = -\Phi_{n-1} \partial_n + i_{1*} - i_{0*}
$$

証明.

$$
\begin{aligned}
\partial_{n+1} \Phi_n \sigma &= \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n+1}} (-1)^{i+j} (\sigma \times 1_{[0,1]}) s_i^{(n+1)} d_j^{(n)} \\
&= \sum_{0 \leq i < j-1 \leq n} (-1)^{i+j} (\sigma \times 1_{[0,1]}) s_i^{(n+1)} d_j^{(n)} \\
&+ \sum_{0 \leq i = j-1 \leq n} (-1)^{i+j} (\sigma \times 1_{[0,1]}) s_i^{(n+1)} d_j^{(n)} \\
&+ \sum_{0 \leq i = j \leq n} (-1)^{i+j} (\sigma \times 1_{[0,1]}) s_i^{(n+1)} d_j^{(n)} \\
&+ \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} (\sigma \times 1_{[0,1]}) s_i^{(n+1)} d_j^{(n)}
\end{aligned}
$$

等式のところはすべて j にそろえて, (2) の $s_j^{(n+1)} d_{j-1}^{(n)} = s_j^{(n+1)} d_j^{(n)}$ を用いて,

$$\begin{aligned}\partial_{n+1}\Phi_n\sigma = &\sum_{0\le i<j-1\le n} (-1)^{i+j}(\sigma\times 1_{[0,1]})s_i^{(n+1)}d_j^{(n)} \\ &-\sum_{0\le j-1\le n}(\sigma\times 1_{[0,1]})s_j^{(n+1)}d_j^{(n)} \\ &+\sum_{0\le j\le n}(\sigma\times 1_{[0,1]})s_j^{(n+1)}d_j^{(n)} \\ &+\sum_{0\le j<i\le n}(-1)^{i+j}(\sigma\times 1_{[0,1]})s_i^{(n+1)}d_j^{(n)}\end{aligned}$$

右辺第二項第三項を書きだすことで, 打ち消しあって,

$$\begin{aligned}\partial_{n+1}\Phi_n\sigma = &\sum_{0\le i<j-1\le n} (-1)^{i+j}(\sigma\times 1_{[0,1]})s_i^{(n+1)}d_j^{(n)} \\ &+(\sigma\times 1_{[0,1]})s_{n+1}^{(n+1)}d_{n+1}^{(n)}-(\sigma\times 1_{[0,1]})s_0^{(n+1)}d_0^{(n)} \\ &+\sum_{0\le j<i\le n}(-1)^{i+j}(\sigma\times 1_{[0,1]})s_i^{(n+1)}d_j^{(n)}\end{aligned}$$

(2) の $s_{j-1}^{(n+1)} d_j^{(n)} = s_j^{(n+1)} d_j^{(n)}$ を用いると,

$$\begin{aligned}\partial_{n+1}\Phi_n\sigma = &\sum_{0\le i<j-1\le n} (-1)^{i+j}(\sigma\times 1_{[0,1]})s_i^{(n+1)}d_j^{(n)} \\ &+(\sigma\times 1_{[0,1]})s_{n}^{(n+1)}d_{n+1}^{(n)}-(\sigma\times 1_{[0,1]})s_0^{(n+1)}d_0^{(n)} \\ &+\sum_{0\le j<i\le n}(-1)^{i+j}(\sigma\times 1_{[0,1]})s_i^{(n+1)}d_j^{(n)}\end{aligned}$$

(3)(4) を用いると,

$$\begin{aligned}\partial_{n+1}\Phi_n\sigma = &\sum_{0\le i<j-1\le n} (-1)^{i+j}(\sigma\times 1_{[0,1]})s_i^{(n+1)}d_j^{(n)} \\ &+(\sigma\times 1_{[0,1]})i_1-(\sigma\times 1_{[0,1]})i_0 \\ &+\sum_{0\le j<i\le n}(-1)^{i+j}(\sigma\times 1_{[0,1]})s_i^{(n+1)}d_j^{(n)}\end{aligned}$$

成分を追うと $(\sigma \times 1_{[0,1]})i_\epsilon = i_\epsilon \sigma$ なので,

$$
\begin{aligned}
\partial_{n+1}\Phi_n\sigma = &\sum_{0\le i<j-1\le n} (-1)^{i+j}(\sigma \times 1_{[0,1]})s_i^{(n+1)}d_j^{(n)} \\
&+ i_1\sigma - i_0\sigma \\
&+ \sum_{0\le j<i\le n} (-1)^{i+j}(\sigma \times 1_{[0,1]})s_i^{(n+1)}d_j^{(n)}
\end{aligned}
$$

第一項に (1), 第四項に (5) を適用すると,

$$
\begin{aligned}
\partial_{n+1}\Phi_n\sigma = &\sum_{0\le i<j-1\le n} (-1)^{i+j}(\sigma d_{j-1}^{(n-1)} \times 1_{[0,1]})s_i^{(n)} \\
&+ i_1\sigma - i_0\sigma \\
&+ \sum_{0\le j<i\le n} (-1)^{i+j}(\sigma d_j^{(n-1)} \times 1_{[0,1]})s_{i-1}^{(n)}
\end{aligned}
$$

第一項の $j-1$ を j, 第四項の $i-1$ を i に置き換えると,

$$
\begin{aligned}
\partial_{n+1}\Phi_n\sigma = &\sum_{0\le i<j\le n} (-1)^{i+j+1}(\sigma d_j^{(n-1)} \times 1_{[0,1]})s_i^{(n)} \\
&+ i_1\sigma - i_0\sigma \\
&+ \sum_{0\le j<i+1\le n} (-1)^{i+j+1}(\sigma d_j^{(n-1)} \times 1_{[0,1]})s_i^{(n)}
\end{aligned}
$$

第一項と第四項をまとめて,

$$
\begin{aligned}
\partial_{n+1}\Phi_n\sigma = &-\sum_{\substack{0\le i\le n-1 \\ 0\le j\le n}} (-1)^{i+j}(\sigma d_j^{(n-1)} \times 1_{[0,1]})s_i^{(n)} \\
&+ i_1\sigma - i_0\sigma
\end{aligned}
$$

Φ_{n-1} の定義より

$$
\begin{aligned}
\partial_{n+1}\Phi_n\sigma = &-\Phi_{n-1}\sum_{0\le j\le n} (-1)^j\sigma d_j^{(n-1)} \\
&+ i_1\sigma - i_0\sigma
\end{aligned}
$$

よって

$$\partial_{n+1}\Phi_n\sigma = -\Phi_{n-1}\partial_n\sigma + i_1\sigma - i_0\sigma$$

□

以上により, Φ が i_{0*}を i_{1*} に結ぶチェインホモトピーであることが示された.