Lax–Milgram の定理と偏微分方程式の弱解の一意性

ゆーぐま

2024 年 8 月 4 日

目次

1 はじめに 1
1.1 内容 1
1.2 基本的な用語の定義 2
1.3 L^2 空間 4

2 Stampacchia の定理・Lax–Milgram の定理 6
2.1 汎関数・線形汎関数・Riesz–Fréchet の表現定理 6
2.2 Stampacchia の定理・Lax–Milgram の定理 8
2.3 微分方程式の弱解 12
2.4 Poisson 方程式への応用 14

1 はじめに

1.1 内容

この pdf では楕円型偏微分方程式の弱解の一意性を示す際に便利な Lax–Milgram の定理について紹介する. 前提知識は線形代数 (ベクトル空間, 線形写像の定義) と Euclid 空間上の微積である. 第 1.2 節においては Hilbert 空間などの定義をしているので, 知っていれば飛ばしてもらって構わない.

1.2　基本的な用語の定義

まず距離というものが入った空間である距離空間について述べる.

定義 1.2.1

集合 X が以下の三条件を満たす**距離**と呼ばれる写像 $d: X \times X \to \mathbb{R}$ を持つとき, (X, d) を**距離空間**という.

(i) 全ての $x, y \in X$ について $d(x, y) \geq 0$ であり, $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

(ii) 全ての $x, y, z \in X$ について $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

また距離空間において大事な概念として, 収束列と Cauchy 列という概念がある. それらは距離空間における点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = (x_1, x_2, \cdots)$ のようなものに定義されるもので, 感覚的には添え字が大きくなればなるほどある点 x に近づくような列を収束列と言い, 添え字が大きくなればなるほど動きが小さくなるような列のことを Cauchy 列という. 例えば実数空間 $\mathbb{R}$ 上の $a_n = \dfrac{1}{n}$ などは添字が大きければ 0 に小さくなり, 動きも小さくなるので収束列かつ Cauchy 列である. Cauchy 列であればどこかの点に収束してほしいので, 収束するような空間を完備であるという.

定義 1.2.2

- 距離空間 (X, d) の点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が**収束列**であるとは, ある $x \in X$ で, どれだけ小さい正の数 ε を取ってきても, それに対応する自然数 $N(\varepsilon)$ が存在して, $N(\varepsilon)$ 以上の自然数 n に対して, $d(x, x_n) < \varepsilon$ が満たされるようなものが存在することである. このとき, $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ と書く.
- 一方, 距離空間 (X, d) の点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が **Cauchy 列**であるとは, ある $x \in X$ で, どれだけ小さい正の数 ε を取ってきても, それに対応する自然数 $N(\varepsilon)$ が存在して, $N(\varepsilon)$ 以上の自然数 n, m に対して, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ が満たされるようなものが存在することである.
- 任意の Cauchy 列が収束列である距離空間を**完備**であるという.

次にベクトル空間のベクトルに大きさを与えるノルムという写像を備えたノルム空間の定義をここに記す.

定義 1.2.3

$\mathbb{R}$ 上ベクトル空間 V が以下の三条件を満たす**ノルム**と呼ばれる写像 $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ を持つとき, $(V, \|\cdot\|)$ を**ノルム空間**という.

(i) 全ての $\boldsymbol{v} \in V$ について $\|\boldsymbol{v}\| \geq 0$ であり, $\|\boldsymbol{v}\| = 0 \iff \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

(ii) 全ての $\boldsymbol{v} \in V$, $c \in \mathbb{R}$ について $\|c\boldsymbol{v}\| = |c|\|\boldsymbol{v}\|$

(iii) 全ての $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ について $\|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{w}\| \geq \|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\|$

ノルム空間は, $d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\|$(この距離を**ノルムから誘導された距離**という) で定めると距離空間であることが確かめられる.

その一方で, Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の類似で, ベクトル同士の角度の構造を定める内積という構造が入ったベクトル空間を内積空間という.

定義 1.2.4

$\mathbb{R}$ 上ベクトル空間 V が以下の二条件を満たす**内積**と呼ばれる双線形写像 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ を持つとき, $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を**内積空間**という.

(i) 全ての $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ について $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \rangle$

(ii) 全ての $\boldsymbol{v} \in V$ について $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \geq 0$ であり, $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0 \iff \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

補足として, ここでの定義は $\mathbb{R}$ 上ベクトル空間での定義であって, $\mathbb{C}$ 上ベクトル空間だと少し異なることに注意 (これは Hermitte 内積と標準内積の違いにあたる)[*1]. ノルムを $\|\boldsymbol{v}\| := \sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle}$ で定めればノルム空間だとみなせることが確かめられ (このノルムを**内積から誘導されたノルム**という), それゆえ距離空間でもあることが分かる. (つまり距離は $d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := \sqrt{\langle \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \rangle}$ で定められる) 以降に行う関数解析の議論では, 関数をベクトル ($\fallingdotseq$ 矢印) と見て矢印の極限を取るなどしたいというのが念頭にあり, 収束に関していい性質を持ってほしいので以下のような空間を考える.

定義 1.2.5

ノルム空間 B が **Banach 空間**であるとは, B がノルムから誘導された距離で距離空間とみなしたときに完備であることをいい, 内積空間 H が **Hilbert 空間**であるとは H が内積から誘導されたノルムで Banach 空間であることをいう.

[*1] 具体的には, 第二変数が線型ではなく共役線型であることと, 条件 (i) が $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \rangle}$ に置き換わる

以下のことをまとめるとこのようになる．但し☆は性質・構造が定義に含まれているものである．

性質・構造	距離空間	ノルム空間	内積空間	Banach 空間	Hilbert 空間
距離	☆	○	○	○	○
ノルム		☆	○	☆	○
内積			☆		☆
完備性				☆	☆

1.3 L^2 空間

ここでは Hilbert 空間の例である L^2 空間について紹介する．[*2]

定理 1.3.1

実数直線上 $\mathbb{R}$ の区間 I について，$L^2(I)$ を $\displaystyle\int_I |u(x)|^2 dx$ が有限となるような関数 $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ の集合 (をほとんどいたるところ (a.e.) で等しいものを同一視した集合) とする．このとき，$L^2(I)$ には内積を以下のように入れられる:

$$\langle u, v \rangle := \int_I u(x)v(x)dx$$

これは Hilbert 空間になる．

証明. $\{u_n\}$ を $L^2(I)$ の Cauchy 列とする．誘導されるノルム $\|\cdot\|$ を用いて $\delta_m = \sup_{n>m} \|u_n - u_m\|$ とすると，$\delta_m \to 0$ なので，δ_m の部分列 δ_{m_k} が存在して，$\delta_{m_k} < 2^{-k}$ となるように取れる．Cauchy 列が収束する部分列を含めば収束するという事が，三角不等式と ε, δ-論法をすると分かるので，u_{m_k} が収束することを示せば良い．一方で，誘導されるノルムに関して三角不等式が成り立つことと Lebesgue の単調収束定理 (※積分の単調

[*2] 定理中の「ほとんどいたるところで」というのは，詳しくは述べないが，Euclid 空間 $\mathbb{R}$ のある特別な部分集合に対してその大きさを表す実数を与える特別な関数 Lebesgue 測度 μ を用いて，$\mu(A) = 0$ となるような集合を零集合といい，「零集合の部分を除いて」という意味である．

収束定理, 証明略) に注意すると,

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=0}^{\infty}|u_{m_{k+1}}-u_{m_k}|\right\| &= \lim_{N\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{N}|u_{m_{k+1}}-u_{m_k}|\right\| \quad (\because \text{中身は三角不等式から単調列}) \\
&\leq \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\|u_{m_{k+1}}-u_{m_k}\| \\
&\leq \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\delta_{m_k} \qquad (\because \delta_{m_k}\text{の定義}) \\
&< \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}2^{-k} \\
&= 2 \\
&< \infty
\end{aligned}$$

よって $v:=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(u_{m_{k+1}}-u_{m_k})$ は a.e. で絶対収束し (しないとすると発散するので矛盾), さらに $v\in L^2(I)$.

$$\begin{aligned}
\left\|v-\sum_{k=0}^{N}(u_{m_{k+1}}-u_{m_k})\right\| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty}\|u_{m_{k+1}}-u_{m_k}\| \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty}\|u_{m_{k+1}}-u_{m_k}\| - \sum_{n=0}^{N}\|u_{m_{k+1}}-u_{m_k}\| \\
&\xrightarrow[N\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

よって $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(u_{m_{k+1}}-u_{m_k})$ は $L^2(I)$ で v に収束. $u_{m_l}=u_{m_0}+\displaystyle\sum_{k=0}^{l-1}(u_{m_{k+1}}-u_{m_k})$ であることから, $l\to\infty$ で u_{m_l} は収束. これが示したいことであった. □

このような L^2 空間は様々なところに現れる. その一例として, Fourier 級数がある. まず Hilbert 空間の一般論として内積, つまり角度と長さが指定されているので, 長さが 1 や直交するといった概念が定義される. よって長さが 1 で互いに直交するベクトルの集まりである正規直交系 (ONS) というものが定義でき, これが任意の元を無限和を許して (よって収束を扱う必要がある) 生成できるとき**完全正規直交系 (CONS)** という. $L^2([-\pi,\pi])$ において CONS として, $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos n\pi t$, $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin n\pi t$, $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$(n は正整数) というものがとれ, この CONS を $\{e_i\}$ と表記したとき, 各成分への射影を表す $x=\displaystyle\sum_i\langle x,e_i\rangle e_i$ は Fourier 級数となる.

2　Stampacchia の定理・Lax–Milgram の定理

2.1　汎関数・線形汎関数・Riesz–Fréchet の表現定理

まずは線形汎関数について述べる．まず**汎関数 (functional)** とは, 関数を与えると数が返ってくるような写像である．例としては, 区間 $[a,b]$ における $y = f(x)$ のグラフの長さ

$$l[f] = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

などである．このような汎関数の値を適切な束縛条件のもと最大最小化する**変分問題**のために, 関数そのものを少しだけ動かす**変分法**という分野がある．この $l[f]$ は当たり前だが線型ではない．線型汎関数は文字通り線形な汎関数で, 例えば,

$$I[f] = \int_a^b f(x)dx$$

などが線型だと確かめることができる (和とスカラー倍を保てばよろしいのでそれを確かめよう)．ここで線形汎関数の厳密な定義と, 線形汎関数の有界性に次いで言及しておく．以下ではベクトル空間 V は関数のなす空間だと思っておくと良い.(関数空間でなくてもよいので以下のような表記にしてある)

定義 2.1.1

$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V に対して, $\varphi : V \to \mathbb{R}$ で線形なものを**線型汎関数**といい, V 上の線形汎関数の集合を V^* と書き, $(\varphi+\psi)(f) := \varphi(f)+\psi(f)$, $(k\varphi)(f) := k\varphi(f)$ などと定めることで $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間の構造が定まり, これを **(代数的) 双対空間**と呼ぶ．また, V がノルム空間であると, 線形汎関数 ϕ に対して**作用素ノルム**と呼ばれる量 $\|\varphi\|_{\mathrm{op}} := \sup_{f\in V\setminus\{0\}} \dfrac{|\varphi(f)|}{\|f\|}$ が有限であるとき, **有界**であると呼ばれる．このノルムに関して V^* はノルム空間の構造も入る．代数的双対空間の部分空間として有界線形汎関数の集合を **(連続的) 双対空間**という.(和とスカラー倍について閉じていることを確かめることが必要)(同じ V^* で表されることが多い)

以降, 双対空間は連続的双対空間を表すものとする．ここで記法として, **線形汎関数 φ, 関数 u に対して $\langle\varphi,u\rangle := \varphi(u)$ であるとする．**これは以降で双対空間をもとの空間とある意味で対等に扱うためにこの記法を採用している．

Hilbert 空間 H と H^{**} は $\iota : H \longrightarrow H^{**}$, $v \mapsto \langle \cdot, v \rangle$ で同型になることが知られていて, このような性質を**回帰的**と呼ぶ. これは次に述べる定理を二回使うことで従う.

Hilbert 空間 H とその連続的双対空間 H^* は以下の定理よりある意味同一視してよい.

定理 2.1.2

(Riesz–Fréchet の表現定理)

H を Hilbert 空間とし, H^* を H の有界線型汎関数のなす双対空間とする. 任意の $\varphi \in H^*$ が与えられたとき,

$$\langle \varphi, u \rangle = \langle f, u \rangle \quad \forall u \in H$$

となるような $f \in H$ がただ一つ存在する. さらに,

$$\|\varphi\|_{\mathrm{op}} = \|f\|$$

すなわち, H と H^* は**等長 (=ノルムを保つ) 同型**.

証明. 次のように定義される写像 $T : H \to H^*$ を考える: 任意の $f \in H$ が与えられたとき, 写像 $u \mapsto \langle f, u \rangle$ は, H の有界 ($\because$ Schwarz の不等式 $|\langle f, u \rangle| \leq \|f\|\|u\|$) 線形汎関数である. それは H^* の元で, Tf と書くことにして,

$$\langle Tf, u \rangle = \langle f, u \rangle \quad \forall u \in H$$

を満たす. これが線型であることは定義から明らか. $\|Tf\|_{\mathrm{op}} = \|f\|$ である. このことは以下のように従う:

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{\mathrm{op}} &= \sup_u \frac{|\langle Tf, u \rangle|}{\|u\|} \\ &= \sup_u \frac{|\langle f, u \rangle|}{\|u\|} \\ &= \|f\| \end{aligned}$$

但し, 二行目から三行目の式変形は, Schwarz の不等式 $|\langle f, u \rangle| \leq \|f\|\|u\|$ と $|\langle f, f \rangle| = \|f\|^2$ を用いた. T の全射性を示す. $\varphi \in H^*$ に対して, $\varphi = 0$ の時は $f = 0$ とすればよいので, $\varphi \in H^* \setminus \{0\}$ を考える. $N = \operatorname{Ker} \varphi$ として, $\langle g, n \rangle = 0 \quad \forall n \in N$ となるような $g \neq 0$ を取る (詳しくは述べないが**直交補空間**の一般論からとれる). この時,

$$f := \frac{\varphi(g)}{\|g\|^2} g$$

とすれば, 任意の $u \in H$ に対して,

$$\langle f, u\rangle = \langle f, u - \frac{\varphi(u)}{\varphi(g)} g\rangle + \langle f, \frac{\varphi(u)}{\varphi(g)} g\rangle$$

$u - \dfrac{\varphi(u)}{\varphi(g)} g \in \operatorname{Ker}\varphi = N$ とすれば, f, g の取り方から第一項が 0 となる. このことと f の定義を合わせて,

$$\begin{aligned}\langle f, u\rangle &= \langle f, \frac{\varphi(u)}{\varphi(g)} g\rangle \\ &= \langle \frac{\varphi(g)}{\|g\|^2} g, \frac{\varphi(u)}{\varphi(g)} g\rangle \\ &= \varphi(u) \\ &= \langle \varphi, u\rangle\end{aligned}$$

これが単射であることは, $Th = 0$ であるとき $\langle h, u\rangle = 0 \quad \forall u \in H$ を意味するが, $u = h$ とすると, 定義 1.2.4(ii) より $h = 0$ となるので, $\operatorname{Ker} h = \{0\}$ より従う. □

2.2 Stampacchia の定理・Lax–Milgram の定理

ここで双線形形式 $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$(片方の引数を固定すると線形写像になる写像, 例としては $\mathbb{R}^n$ の標準内積など) に対して二つの概念を定義する.

定義 2.2.1

- 双線形形式 $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ が**有界 (bounded)** あるいは**連続 (continuous)** であるとは, ある定数 $C > 0$ が存在して, すべての $u, v \in V$ に対して

$$|a(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|$$

  となることである.
- 双線形形式 $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ が**強圧的 (coercive)** であるとは, ある定数 $\alpha > 0$ が存在して, すべての $v \in V$ に対して

$$|a(v, v)| \geq \alpha\|v\|^2$$

  となることである.

このような双線形形式に対して以下のような定理が成り立つ.

定理 2.2.2

(Stampacchia の定理)

$a(u,v)$ を H の連続な強圧的双線形形式とする. $K \subset H$ を空でない閉かつ凸 (任意の二点を結ぶ線分がその集合の中に入っていること) な部分集合とする. 任意の $\varphi \in H^*$ について, 唯一の元 $u \in K$ が存在して,

$$a(u, v-u) \geq \langle \varphi, v-u \rangle \quad \forall v \in K$$

を満たす. 加えて a が対称的 $(a(u,v) = a(v,u))$ ならば, u は

$$u \in K \text{ かつ } \frac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}$$

で特徴づけられる.

後半の条件は一見すると良くわからないように思われるが, この**最小化問題を解けば** u **が求まる**という事を主張している. 証明の前に, 閉かつ凸な部分集合 K に対する射影というものを考える. 以下の定理は事実として認める.

定理 2.2.3

$K \subset H$ を空でない凸集合とする. その時 $f \in H$ に対して $u \in K$ で

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\|$$

となるものがただ一つ存在する.(つまり f に一番近い元) 加えて, u は

$$u \in K \text{ かつ } \langle f-u, v-u \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K$$

で特徴づけられる. この u を $P_K f$ と書く.

証明. (定理 2.2.2) Riesz–Fréchet の表現定理から, ただ一つの $f \in H$ で $\langle \varphi, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H$ となるものが存在する. その一方で, $u \in H$ を固定したならば, 写像 $v \mapsto a(u,v)$ は H の線形汎関数である. もう一回 Riesz–Fréchet の表現定理を用いると, ある H のただ一つの元 Au が存在して, $a(u,v) = \langle Au, v \rangle \quad \forall v \in H$. 明らかに A は H から H への線形写像で, 連続性と強圧性より,

$$\|Au\| \leq C\|u\|$$

$$\langle Au, u\rangle \geq \alpha\|u\|^2$$

題意の $a(u, v-u) \geq \langle \varphi, v-u\rangle$ は

$$\langle Au, v-u\rangle \geq \langle f, v-u\rangle$$

となるようなある $u \in K$ を求めることになる. $\rho > 0$ を定数とする (あとで定義する). これは

$$\langle \rho f - \rho Au + u - u, v - u\rangle \leq 0$$

と同値なことに注意する. すなわち,

$$u = P_K(\rho f - \rho Au + u) \tag{$*$}$$

となるような $u \in K$ が存在することを示せば良いが, 写像 $S : H \longrightarrow H$ を

$$S(v) = P_K(\rho f - \rho Av + v)$$

で定めて, $\rho > 0$ を適切に取るとこれが縮小写像である, すなわちある 1 より真に小さい定数 k が存在して,

$$\|S(v_1) - S(v_2)\| \leq k\|v_1 - v_2\| \tag{$\bigstar$}$$

であることを示せば Banach の不動点定理より $u = S(u)$ となるような $u \in K$ が存在して $(*)$ が満たされる. 射影の特徴づけから $f = \rho f - \rho Av_1 + v_1$, $v = S(v_2)$, $u = S(v_1)$ として,

$$\langle(\rho f - \rho Av_1 + v_1) - S(v_1), S(v_2) - S(v_1)\rangle \leq 0 \tag{1}$$

同様に $f = \rho f - \rho Av_2 + v_2$, $v = S(v_1)$, $u = S(v_2)$ として,

$$-\langle(\rho f - \rho Av_2 + v_2) - S(v_2), S(v_2) - S(v_1)\rangle \leq 0 \tag{2}$$

(1)(2) を辺々足し合わせることで

$$\langle(- \rho(Av_1 - Av_2) + v_1 - v_2) + S(v_2) - S(v_1), S(v_2) - S(v_1)\rangle \leq 0$$

移項すると,

$$\langle S(v_2) - S(v_1), S(v_2) - S(v_1)\rangle \leq \langle(v_2 - v_1 - \rho(Av_2 - \rho Av_1)), S(v_2) - S(v_1)\rangle$$
$$\|S(v_2) - S(v_1)\|^2 \leq \langle(v_2 - v_1 + \rho(Av_1 - Av_2), S(v_2) - S(v_1)\rangle$$

これと Schwarz の不等式より

$$\|S(v_2) - S(v_1)\| \leq \|v_2 - v_1 + \rho(Av_1 - Av_2)\|$$

これを 2 乗すると,

$$\begin{aligned}\|S(v_2)-S(v_1)\|^2 &\le \|v_2-v_1\|^2-2\rho\langle Av_1-Av_2, v_1-v_2\rangle+\rho^2\|(Av_1-Av_2)\|^2\\ &\le \|v_1-v_2\|^2(1-2\rho\alpha+\rho^2C^2)\end{aligned}$$

但しここで連続性と強圧性から従う不等式を用いた. $k^2 := 1-2\rho\alpha+\rho^2C^2$ が 1 より小さくなる, つまり $0<\rho<2\alpha/C^2$ と取れば (★) が満たされ題意の前半が示される.

$a(u,v)$ が対称的だったとすると, a は H の新たな内積となる. 対応するノルム $a(u,u)^{1/2}$ は有界性と強圧性から元のノルムと同値なノルム (※定数倍で挟めるノルム) となり, この内積に関しても H は Hilbert 空間となる. Riesz–Fréchet の表現定理を用いると, 新たな内積は汎関数を用いて表現できる. つまりただ一つの元 $u\in K$ が存在して, すべての $v\in K$ に対して

$$\langle\varphi, v\rangle = a(g,v)$$

とできる. これを用いると, 定理中の $a(u,v-u)\ge\langle\varphi, v-u\rangle$ は

$$a(g-u, v-u)\le 0 \quad \forall v\in K$$

と書き換わり, このような $u\in K$ を求めることになる. この解は旧友[*3]である: u は単に新たな内積 a に関する K への g の射影である. また (定理 2.2.3 から)u は K の

$$\min_{v\in K} a(g-v, g-v)^{1/2}$$

を満たす唯一の元である. これは結局 K で

$$v\mapsto a(g-v,g-v)=a(v,v)-2a(g,v)+a(g,g)=a(v,v)-2\langle\varphi,v\rangle+a(g,g)$$

を最小化する, つまり

$$v\mapsto \frac{1}{2}a(v,v)-\langle\varphi,v\rangle$$

を最小化することになる. □

[*3] この節のもととなっている H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations* の原文: The solution of (16) is **an old friend**: u is simply the *projection*.......

この定理について $K = H$, v を $v+u$, $-v+u$ として, 以下の定理が成り立つ.

定理 2.2.4

(Lax-Milgram の定理)

$a(u,v)$ を H の連続な強圧的双線形形式とする. 任意の $\varphi \in H^*$ について, 唯一の元 $u \in H$ が存在して,

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in H$$

を満たす. 加えて a が対称的 $(a(u,v) = a(v,u))$ ならば, u は

$$u \in H \text{ かつ } \frac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}$$

で特徴づけられる.

この定理を応用していくつかの偏微分方程式のある種の一意性を示してみよう.

2.3 微分方程式の弱解

境界値問題

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{on } I = [a,b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

を考える. 但し, f は与えられた $L^2(I)$ の元とする. 境界条件 $u(a) = u(b) = 0$ は **Dirichlet 境界条件**と呼ばれている. この解は簡単な計算によって明示的に書けることが知られているが, ここでは簡単な例で説明するためにこのことには目をつぶることにする. この時, この方程式の**古典解**とは, 通常の意味での解 $u \in C^2(I)$ のことである.

弱解について話す. 上の式に $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ となるような C^1 級関数 (**テスト関数**と呼ばれる) を掛けて,

$$-u''\varphi + u\varphi = f\varphi$$

積分して,

$$-\int_I u''\varphi dx + \int_I u\varphi dx = \int_I f\varphi dx$$

第一項を部分積分をして,

$$\int_I u'\varphi' dx + \int_I u\varphi dx = \int_I f\varphi dx \tag{A}$$

これを満たすような u のことを**弱解**と呼ぶ．また，この方程式は**弱形式**と呼ばれる．(この関数がどこの空間の元かは後で考える) この弱解は逆の方の関数を部分積分してまとめれば

$$\int_I (-u'' + u - f)\varphi dx = 0$$

となり，これは積分の一般論から a.e. で古典解と一致し，逆に古典解はこれを満たす．

弱解の概念を定式化するために，Sobolev 空間 H^1 というものを考える．区間 I の外側で 0 になる C^1 級関数を $C_c^1(I)$ と表記すると，

$$H^1(I) = \left\{ u \in L^2(I); \exists g \in L^2(I) \text{ s.t.} \int_I u\varphi' dx = -\int_I g\varphi dx \quad \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\}$$

括弧内の g は u の**弱微分**と呼ばれ，$g = u'$ とも書かれる．また $H_0^1(I)$ を，$H^1(I)$ における $C_c^1(I)$ の収束する関数列の極限の集合とする．但しここで $H^1(I)$ の内積を，

$$\langle u, v \rangle_{H^1(I)} := \int_I (uv + u'v')dx$$

としてノルムと距離を入れて極限を考えた．これもまた Hilbert 空間になることが知られている．

さて，式 (A) に戻ろう．テスト関数 φ は C^1 級としたが，もっと広く H_0^1 の元としよう．いま，

$$a(u, v) = \int_I u'v'dx + \int_I uvdx$$

とする．これは連続かつ強圧的である．但し H_0^1 には

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1} = \int_I u'v'dx$$

で内積を入れる．

$$a(u, u) = \int_I u'^2 dx + \int_I u^2 dx \geq \|u'\|_{L^2}^2 = \|u\|_{H_0^1}$$

で**強圧的**であり，Schwarz の不等式から

$$a(u, v) = \int_I u'v'dx + \int_I uvdx \leq \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}$$

ここで，Poincaré の不等式というものがあり，ある u に依らない定数 C が存在して，$\|u\|_{L^2} \leq C\|u'\|_{L^2}$ となるので，

$$a(u, v) = \int_I u'v'dx + \int_I uvdx \leq (1 + C^2)\|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} = (1 + C^2)\|u\|_{H_0^1}\|u\|_{H_0^1}$$

となり**連続**なことが分かる.

以上より, 式 (A) は,

$$a(u,v) = \int fvdx$$

という事になり, 汎関数を $\varphi(v) = \int fvdx$ で定めれば ($H = H_0^1$ として)Lax-Milgram の定理が適用でき, このような u は**一意に存在**する. さらに,

$$I[v] = \int_I \frac{1}{2}(v^2 + v'^2)dx - \int_I fvdx$$

を最小にするような v を見つければそれが u となる, すなわち**弱解を求めることはこの変分問題を解くことに帰着される**. これは **Dirichlet の原理**と呼ばれている.

2.4 Poisson 方程式への応用

さて, 今度は多次元の **Poisson 方程式**という方程式について考えよう. Poisson 方程式とは Euclid 空間 $\mathbb{R}^d$ 上の領域 Ω とその境界 $\partial\Omega$ に対して

$$\begin{cases} -\Delta u = f & (x \in \Omega) \\ u(x) = 0 & (x \in \partial\Omega) \end{cases}$$

という方程式である. 但し, u は座標 $x = (x_1, \ldots, x_d)$ に依る関数であり, Δ とは, **ラプラシアン**と呼ばれる偏微分作用素 (楕円型と呼ばれる種類である) で,

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u$$

と定義されている. 多変数の重積分を用いることで, 同様に Sobolev 空間を,

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \forall 1 \le i \le d, \exists g_i \in L^2(\Omega) \text{ s.t.} \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega g_i \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega) \right\}$$

として, $g_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i} u$ と表記することにすると, $u \in H^1(\Omega)$ に,

$$\nabla u := \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} u$$

という偏微分作用素が入る. 同様に, $H^1(\Omega)$ での Ω の外側では消える C^1 関数の極限の集合を $H_0^1(\Omega)$ とする. 多変数における部分積分 (Green の恒等式) をすることによって, 弱

形式は

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v dx=\int_\Omega fv dx$$

というようになる．ここで Sobolev 空間 $H_0^1(\Omega)$ と双線形形式 $a(u,v)=\displaystyle\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v dx$ と汎関数 $\varphi(v)=\displaystyle\int_\Omega fv dx$ に対し, Lax-Milgram の定理を適用することで, u の弱解の一意性が導かれる．(有界性と強圧性は§ 2.3 の多次元版の類似した議論が成立することから従う.)

また対応する変分問題は,

$$I[v]=\int_\Omega (\frac{1}{2}|\nabla v|^2-fv)dx$$

の最小化となる.

最後に余談ではあるがこの式が Euler-Lagrange 方程式によって元に戻ることを見てみよう.(ここから先は変分法の知識が必要となる)

$$I[v]=\int_\Omega (\frac{1}{2}|\nabla v|^2-fv)dx$$

これにおける Euler-Lagrange 方程式は (本当は代入する値と変数を区別して書くべきだがここでは同一視して書く),

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{2}\sum_k(\partial_k v)^2-fv\right)-\sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial(\partial_j v)}\left(\frac{1}{2}\sum_k(\partial_k v)^2-fv\right)=0$$

$$-f-\sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial(\partial_j v)}\left(\frac{1}{2}\sum_k(\partial_k v)^2\right)=0$$

$$-f-\sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}(\partial_j v)=0$$

$$-\Delta v=f$$

となり元の Poisson 方程式に戻る.