第 2 回
Weierstrass の $\wp$ 関数について

目次

§2.1　記号の規約, 準備

- $A := B$ や $A :\Longleftrightarrow B$ は A を B と定義するという意味である.
- 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と書く.
- $i^2 = -1$ なる $i \notin \mathbb{R}$ と実数 a, b を用いて, $a + bi$ と表される数を**複素数**という.[*1]
- 複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ と書く. $a + bi$ を座標平面上の点 (a, b) と同一視するとき, その平面を**複素平面**という.
- 複素数 $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ に対して, a を**実部**, b を**虚部**と言い, $\sqrt{a^2 + b^2}$ を**絶対値**という. それぞれ, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$ を書く. これはとりもなおさず,

$$\operatorname{Re} z = a, \operatorname{Im} z = b, |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

  という事である.
- 実数 (場合によっては実数のうち入れられないものもある) を入れたら, 実数が返ってくるようなものを**実関数**という. 代入できる範囲のことを**定義域**という. 慣例的に, 入れる実数のことを x と書くことが多い気はする. 実関数 f に x を入れたときに出てくる値を $f(x)$ と書く. しばしば記号を濫用して $f(x)$ で関数名を表すこともある.
- 複素数 (場合によっては複素数のうち入れられないものもある) を入れたら, 複素数が返ってくるようなものを**複素関数**という. 代入できる範囲のことを**定義域**という. 慣例的に, 入れる複素数のことを z と書くことが多い気はする. 複素

[*1] 代数的には, X を不定元とした実数係数多項式環 $\mathbb{R}[X]$ をその極大イデアル $(X^2 + 1)$ で割った体 $\mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ として構成され, $a \in \mathbb{R}$ の属する同値類を $a \in \mathbb{C}$, X の属する同値類を i と呼ぶ.

関数 f に z を入れたときに出てくる値を $f(z)$ と書く. しばしば記号を濫用して $f(z)$ で関数名を表すこともある.

- 複素関数 $f(z)$ が点 $a \in \mathbb{C}$ で**複素微分可能である**とは,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ が存在する} :\Longleftrightarrow \lim_{|h|\to 0} \frac{|f(a+h)-f(a)|}{|h|} \text{ が存在する} \tag{*}$$

但し, h は複素数の値を動く.

　言明を明白にするならば, どんな (に小さい) 数 $x > 0$ をとっても, h の動く範囲を $|h| < g(x)$ に制限することで,

$$\frac{|f(a+h)-f(a)|}{|h|} < x$$

とできるような 0 より大きい値を返す実関数 $g(x)$ があるという事が $(*)$ の意味である.

- $\mathbb{C}$ における二点 $z, w \in \mathbb{C}$ の**距離**とは, $|z-w|$ のことである.
- $\mathbb{C}$ における x 中心の半径 r の**開球**とは, x との距離が r 未満の点の集合である. これを $B_r(x)$ で表す.
- $\mathbb{C}$ 上の**開集合**とは, $\mathbb{C}$ の部分集合 U のうち, どのような $x \in U$ に対しても, x 中心の開球で, U に含まれるものが取れるものである. 感覚的に言えば, 境界が無いような集合のことを言う. 開集合の補集合として得られる集合を**閉集合**という. 感覚的に言えば, 境界があるような集合のことを言う.
- $\mathbb{C}$ 上の**有界集合**とは, $\mathbb{C}$ の部分集合 S のうち, S を含むような開球が存在するものである. 感覚的には無限には広がってないことである.
- $\mathbb{C}$ 上の**連結**である集合とは, $\mathbb{C}$ の部分集合 S のうち, 空集合でない開集合 U, V で $U \cap V$ が空集合でないものを用いて, $S \subset U \cup V$ とできない物のことを言う. 感覚的には繋がっているもののことを言う.
- $\mathbb{C}$ 上の**領域**とは, ここでは連結な開集合のことを指す.
- 複素関数 $f(z)$ が点 $a \in \mathbb{C}$ で開集合 U 上で**正則である**とは, U 上のどんな点でも複素微分可能であることを言う.
- **関数列** $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ とは, 関数をならべた $f_1, f_2, \ldots$ のようなものである. 0 から始める人もいる.
- 関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が関数 f に**一様収束**するとは,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \text{ は定義域全体を動く}} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

という意味である. 但し, $\sup\limits_{x} f(x)$ とは,【どんな x に対しても $f(x)$ 以上となるような数】のうち, 最も小さいものである. 分かりづらければ最大値のようなも

のだと思ってもらって差支えない. 実際最大値が存在する場合は一致する.

- **関数列** $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の第 N 部分和とは, $F_N(x) := \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ のことであり, その極限

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) := \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} f_n(x) = \lim_{N\to\infty} F_N(x)$$

のことを**関数項級数**と呼ぶ. $\{F_N\}$ を関数列としてみたときある関数に一様収束する場合, **関数項級数は一様収束する**という. 一様収束する場合, 様々な解析的性質が保たれる事が知られている. 今回使うのは以下の二つの定理である (証明は略する):

定理 2.1.1(**正則関数の一様収束先は正則関数**)

$\{f_n\}$ を領域 Ω で定義された正則関数の関数列とする. このとき, $\{f_n\}$ が Ω 上の任意の有界閉集合上で一様収束するならば, 収束先 f は領域 Ω の正則関数である.

定理 2.1.2(**項別微分の条件**)

$\{f_n\}$ を一階微分可能な関数列とする. このとき, $\{f'_n\}$ の関数項級数が各点においてある値に収束し, $\{f_n\}$ の関数項級数が一様収束するならば,

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

- **関数列** $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して, $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ がすべての x である関数に収束する場合, 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は[*2]**絶対収束する**という. 絶対収束するならば収束することが知られている. 今回使う定理は以下である (証明は略する):

定理 2.1.3(**絶対収束するならば好きに足し算の順番を並び替えてよい**)

$\{f_n\}$ を関数列とする. このとき, 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が絶対収束するならば, 自然数の並べ替え $\varphi(n)$(つまり φ は自然数から自然数への全単射) に対して,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{\varphi(n)}(x)$$

[*2] 絶対値が入っていないことに注意

- **関数列** $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の関数項級数が一様かつ絶対収束する事を示すのに便利な定理がある (証明は略する):

定理 2.1.4(Weierstrass **の** M **判定法、あるいは優級数定理**)

$\{f_n\}$ を関数列とする．このとき, $|f_n(x)| \leq M_n$ となるような定数の列 $\{M_n\}$ で, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} M_n$ が収束する場合, 関数列 $\{f_n\}$ は絶対収束かつ一様収束する.

- あとは今回使う有名な定理を紹介する (証明略)

定理 2.1.5 (Taylor **展開**)

領域 Ω 上の正則関数 f と $\alpha \in D$ を考える．α 中心の円周及び内部が D に含まれるとき, その円盤上で,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n$$

は絶対かつ一様収束する.

定理 2.1.6 (**コンパクト領域上の連続関数**)

$\mathbb{C}$ 上で有界な閉集合を**コンパクト集合**という.(一般の定義は異なる) コンパクト領域 Ω 上の関数 f は有界．すなわちある $M>0$ で, どんな $x\in\Omega$ に対しても

$$f(x) < M$$

となるものが存在する.

§2.2　Weierstrass の $\wp$ 関数とは

本題となっている関数を導入する.

定義 2.2.1(**格子、**Weierstrass **の** $\wp$ **関数**)

ω_1, ω_2 を一次独立な $\mathbb{C}$ の元とする．すなわち, 実数 a, b に対して, $a\omega_1 + b\omega_2 = 0$ ならば $a = b = 0$ であるとする．$\Lambda = \{a\omega_1 + b\omega_2 \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ を**格子**と呼ぶ.

以下の複素関数 $\wp$ を **Weierstrass の $\wp$ 関数**と言う.

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

ただし, Σ の下の $\omega \in \Lambda \setminus \{0\}$ は, ω は $\Lambda \setminus \{0\}$ の元全体を渡って和を取るという事を指す. 足す順番は後述するが $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ で絶対収束するので勝手に順番を付けてよい.

定理 2.2.2 (Weierstrass **の** $\wp$ **関数の収束性**)

級数

$$\frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

は $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ で絶対かつ一様収束し, 正則となる.

証明. $M > 0$ を任意に取った実数とする. $|z| \leq M$ **での収束性を考える**. 級数を以下のように分割する.

$$\frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}, |\omega| \leq 2M} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \tag{$*1$}$$

$$+ \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}, |\omega| > 2M} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \tag{$*2$}$$

$(*1)$ は有限和で $z \in \Lambda \cap \overline{B_{2M}(0)}$(但し $\overline{B_r(x)}$ で x との距離が r 以下の集合である閉球を表す) を除いて正則関数だから, $(*2)$ の各成分は,

$$\left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \frac{|z||z-2\omega|}{|z-\omega|^2|\omega|^2}$$

となり,

$$|z-2\omega| \leq |z| + 2|\omega| \leq M + 2|\omega| \leq \frac{5}{2}|\omega|$$

$$|z-\omega| = |\omega - z| \geq |\omega| - |z| \geq |\omega| - M \geq \frac{1}{2}|\omega|$$

となるので,

$$\left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| \leq \frac{10M}{|\omega|^3}$$

と評価できる. 故に,

$$\sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{|\omega|^3}$$

が収束することを示せば優級数定理より題意が示される.

- $\displaystyle\sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}}\frac{1}{|\omega|^{2s}}(s>1)$ の収束性

問題を一般化して上の級数が収束することを示す. Λ の定義から,

$$(\text{上の級数})=\sum_{(a,b)\in\mathbb{Z},(a,b)\neq(0,0)}\frac{1}{|a\omega_1+b\omega_2|^{2s}}$$

ここで,

$$|a\omega_1+b\omega_2|^2=|\omega_1|^2a^2+(\overline{\omega_1}\omega_2+\omega_1\overline{\omega_2})ab+|\omega_2|^2b^2$$

$\alpha=|\omega_1|^2$, $\beta=\dfrac{\overline{\omega_1}\omega_2+\omega_1\overline{\omega_2}}{2}$, $\gamma=|\omega_2|^2$ と置くと,

$$|a\omega_1+b\omega_2|^2=\alpha a^2+2\beta ab+\gamma b^2$$

という事で右辺は $\boldsymbol{x}:=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ と $A:=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\beta&\gamma\end{pmatrix}$ を用いて $\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x}$ と表される二次形式となる. A の固有値は正の実数であることが確かめられて, $\lambda_1<\lambda_2$ と置くと, 直交対角化をすることにより,

$$\lambda_1(a^2+b^2)\leq|a\omega_1+b\omega_2|^2\leq\lambda_2(a^2+b^2)$$

から, 結局

$$I:=\sum_{(a,b)\in\mathbb{Z}^2,(a,b)\neq(0,0)}\frac{1}{a^2+b^2}$$

の収束発散が与えられた級数の収束発散と一致するが,

$$\begin{aligned}I&=\sum_{(a,b)\in\mathbb{Z}^2,(a,b)\neq(0,0)}\frac{1}{(a^2+b^2)^s}\\&=4\sum_{(a,b)\in\mathbb{Z}^2_{>0}}\frac{1}{(a^2+b^2)^s}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2s}}\end{aligned}$$

ここで, 第二項は Riemann の ζ 関数の表示から, $\zeta(2s)$ となり有限値.($s>1$ のとき, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}<1+\int_1^{\infty}\frac{1}{x^s}<\infty$ から従う)

第一項の級数は, a,b を正整数として, $a-1\leq x-1\leq a$, $b-1\leq y-1\leq b$ において,

$$\frac{1}{a^2+b^2}\leq\min\left\{1,\frac{1}{x^2+y^2}\right\}$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
\sum_{(a,b)\in\mathbb{Z}^2_{>0}} \frac{1}{(a^2+b^2)^s} &\leq \iint_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_{\geq 0}, x^2+y^2\geq 1} \frac{1}{x^2+y^2} dxdy \\
&\quad + \iint_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_{\geq 0}, x^2+y^2<1} 1 dxdy \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_1^{\infty} \frac{1}{r^{2s-1}} dr d\theta + \frac{\pi}{4} \\
&= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{-1}{2(s-1)} r^{2-2s} \right]_1^{\infty} d\theta + \frac{\pi}{4} \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2(s-1)} d\theta + \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{4(s-1)} + \frac{\pi}{4} < \infty
\end{aligned}
$$

より, $I = \displaystyle\sum_{(a,b)\in\mathbb{Z}^2,(a,b)\neq(0,0)} \frac{1}{a^2+b^2}$ は収束するので題意は示される. □

定理 2.2.3 (Weierstrass **の** $\wp$ **関数の周期性**)

$\wp(z)$ は二重周期関数; つまり, $\omega \in \Lambda$ に対して,

$$\wp(z+\omega) = \wp(z)$$

証明. $\omega = \omega_1, \omega_2$ の時を調べればよい. $\wp(z)$ を項別微分することで得られる

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega\in\Lambda} \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

は周期関数であり,

$$(\wp(z+\omega) - \wp(z))' = 0$$

となるので, $\wp(z+\omega) - \wp(z)$ は $\mathbb{C} - \Lambda$ 上定数で, $z = -\omega/2$ の時, $\wp(\omega/2) - \wp(-\omega/2)$ となるので, これは $\wp$ 関数の表式から $\wp(z) + \wp(-z) = 0$ が従うので 0. 故に $\wp(z+\omega) = \wp(z)$. □

定理 2.2.4 (Weierstrass **の** $\wp$ **関数の満たす微分方程式**)

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

を満たす. ここで,

$$g_2 := 60 \sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}} \frac{1}{\omega^4}$$

$$g_3 := 140 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^6}$$

証明. $z=0$ での Taylor 級数展開を考えて,

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{n+1}{\omega^{n+2}} z^n$$

この級数は収束半径内で絶対収束するので $\wp$ 関数の表式にこの級数展開表示を代入したあと和は入れ替えてよく,

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{n+1}{\omega^{n+2}} \right) z^n$$

簡単のため, $a_k = \displaystyle\sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^k}$ と置くと,

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n \geq 1} (n+1) a_{n+2} z^n$$

これも相変わらず絶対収束するので,

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + \sum_{n \geq 1} n(n+1) a_{n+2} z^{n-1}$$

この表示を用いて, 関数 $h(z)$ を $\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^2 + 60a_4\wp(z) + 140a_6$ の正則な拡張とする. これが (i)$\underline{h(0) = 0 \text{ である}}$, (ii)$\underline{\mathbb{C} \text{ 全体で正則な}}$, (iii)$\underline{\text{二重周期関数となる}}$ことが示せ, (ii) と (iii) から (iv)$\underline{h(z) \text{ が有界であること}}$が従い, (ii) と (iv) から Liouville の定理が適用でき, $h(z)$ は $\mathbb{C}$ 全域で定数で, (i) から $h(z) = 0$ となり題意が従う. ((i)(ii) は定数項と負冪がないことを示せば良く, (iii) は明らかで, (iv) はコンパクト領域 $\{x\omega_1 + y\omega_2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ への制限が連続であることを考えればよい) □

これは実は $\mathbb{C}^2$(本当は $\mathbb{C}P^2$ と見た方がよいが) 上の座標を X, Y と置くと, $(X, Y) = (\wp(z), \wp'(z))$ が曲線

$$Y^2 = 4X^3 - g_2 X - g_3$$

のパラメータ表示となっていることが従い, 実は $\mathbb{C}^2$ 上の二重周期関数とこのような代数曲線が対応することが分かるが, 飽きたのでこの pdf はここで終わりにする.

参考文献

[1] 小木曽啓示『代数曲線論』, 朝倉書店, 2002.

[2] エリアス・M. スタイン, ラミ・シャカルチ 著, 新井　仁之, 杉本　充, 高木　啓行, 千原　浩之, 訳『複素解析 (プリンストン解析学講義 2)』, 日本評論社, 2009.